

Ćwiczenia nr 1: Procesy Markowa klasy DD

Model opisujący proces stochastyczny $X(t)$:

$$(X, T, F)$$

Gdzie: X - zbiór stanów eksploatacyjnych systemu, T - zbiór wartości parametru, F - rodzina dystrybuant jednoznacznie określająca prawdopodobieństwo osiągnięcia przez system dowolnego stanu $x \in X$ dla dowolnego $t \in T$, $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_i) < x_i, \dots, X(t_n) < x_n)$

Proces stochastyczny o **niezależnych wartościach**

$$P\{X(t_0) < x_0, X(t_1) < x_1, \dots, X(t_i) < x_i, \dots, X(t_n) < x_n\} = \prod_{i=0}^n P\{X(t_i) < x_i\}$$

Proces stochastyczny o **niezależnych przyrostach**

$$P\{X(t_0) < x_0, \Delta X(t_1) < x_1, \dots, \Delta X(t_i) < x_i, \dots, \Delta X(t_n) < x_n\} = P\{X(t_0) < x_0\} \prod_{i=1}^n P\{\Delta X(t_i) < x_i\}$$

$$\Delta X(t_i) = X(t_i) - X(t_{i-1}), i = \overline{1, n}$$

Jednorodne procesy stochastyczne

$$P(X(t_n + \vartheta) < x_n | X(t_{n-1} + \vartheta) = x_{n-1}, \dots, X(t_0 + \vartheta) = x_0) = P(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_0) = x_0)$$

Procesy Markowa

$$P(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, X(t_0) = x_0) = P(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

Proces Markowa jest ahistoryczny, bo dla pełnej charakterystyki stochastycznej procesu w chwili t_n wystarczy znajomość tego procesu w chwili t_{n-1} oraz zbioru dystrybuant warunkowych rozkładów jednowymiarowych określonych prawą stroną powyższego równania.

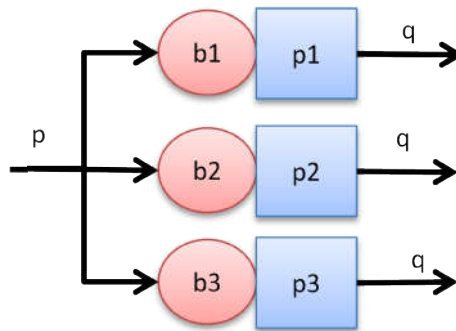
Twierdzenie: Jeżeli proces $X(t)$ jest procesem o niezależnych przyrostach, to jest on procesem Markowa.

Jednorodne procesy Markowa

$$P(X(t_n + \vartheta) < x_n | X(t_{n-1} + \vartheta) = x_{n-1}) = P(X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P(X(\tau) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1})$$

$$\tau = t_n - t_{n-1}$$

Rozpatrujemy następujący system: Co pewien czas (krok) napływa do systemu zadanie z prawdopodobieństwem p . System składa się z 3 jednorodnych procesorów, z których każdy może realizować w danym momencie jedno zadanie i posiada też niezależny bufor na jedno dodatkowe zadanie (jeśli procesor zrealizuje zadanie a w buforze jest zadanie, to trafia ono „od razu” do procesora). Procesory wykonują zadania w kolejnych krokach, przy czym prawdopodobieństwo zakończenia zadania przez procesor w każdym kolejnym kroku wynosi q . Nadchodzące do systemu zadanie umieszczane jest w tym z podsystemów (procesor + bufor), w którym jest najmniejsza liczba zadań. Jeśli jest równa, to do pierwszego wolnego z nich (o najniższym numerze). Jeśli w buforze nie ma zadania i procesor nie realizuje zadania, nadchodzące zadanie trafia „od razu” do procesora. Zadanie jest tracone, gdy system jest „zapełniony”. Na początku w systemie jest jedno zadanie.



Zadanie 1: Zdefiniować proces funkcjonowania systemu

Oznaczmy proces przez $X(t)$

Zbiór parametru T

W opisie systemu zmiany stanu systemu następują „co pewien czas (krok)”.

$$T = \{t_0, t_1, \dots\} \text{ lub prościej } T = \{0, 1, 2, \dots\}$$

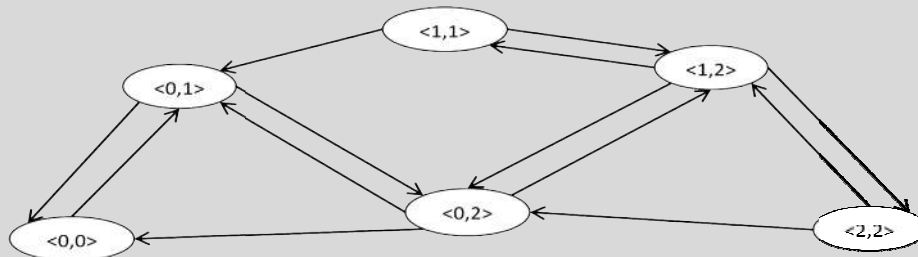
Zbiór stanów eksploatacyjnych X

Dla opisanego systemu każdy stan eksploatacyjny może być opisany za pomocą uporządkowanej pary liczb $\langle a, b \rangle$, gdzie pierwsza z nich a - określa liczbę zadań znajdujących się łącznie we wszystkich buforach a druga b - określa liczbę zadań łącznie we wszystkich procesorach

$$X = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle\}$$

Prawdopodobieństwa przejść między stanami

W opisie systemu pojawiają się dwa prawdopodobieństwa p - prawdopodobieństwo, że do systemu napłynie zadanie oraz q - prawdopodobieństwo zakończenia realizowanego zadania przez procesor w kolejnym kroku



(rysunek przedstawia tylko fragment grafu przejść między stanami w systemie)

Na podstawie opisu systemu można stwierdzić, że proces $X(t)$ jest **jednorodnym procesem Markowa klasy DD**

- przy określeniu stanu systemu w kolejnym kroku, wystarczy wiedzieć jaki jest aktualny stan oraz jakie są prawdopodobieństwa przejść do kolejnych stanów w następnym kroku

- wartości prawdopodobieństw pojawienia się zadania oraz zrealizowania zadania nie są uzależnione od kroku (w każdym kroku są takie same)

Opis probabilistyczny dla jednorodnych procesów stochastycznych Markowa klasy DD (jednorodnych łańcuchów Markowa)

Chwilowe rozkłady bezwarunkowe

$$P_i(k) = P(X(k) = i)$$

Chwilowy rozkład bezwarunkowy $P(t) = \langle \{P_i(t)\}_{i=1}^n \rangle$, n – liczba stanów eksploatacyjnych, $P_i(t) = P\{X(t) = i\}$

Macierz stochastyczna $\Pi^*(l, k) = [p_{ij}(l, k)]_{n \times n}$, $l, k = 1, 2, \dots, l < k$

Dla jednorodnych łańcuchów Markowa $\forall \tau \Pi^*(l + \tau, k + \tau) = \Pi^*(l, k) = \Pi(k - l) = [p_{ij}(k - l)]_{n \times n}$

Dla $l = 0$

$$\Pi(k) = [p_{ij}(k)]_{n \times n}$$

Warunkowe prawdopodobieństwo przejścia po k - krokach

$$p_{ij}(k) = P\{X(t + k) = j | X(t) = i\}$$

Do pełnego opisu probabilistycznego jednorodnego łańcucha Markowa wystarczy:

Rozkład początkowy $P(0) = \langle \{P_i(0)\}_{i=1}^n \rangle$, n – liczba stanów eksploatacyjnych, $P_i(0) = P\{X(0) = i\}$

Jedna macierz

$$\Pi(1) = [p_{ij}(1)]_{n \times n} = \Pi$$

Zadanie 2: Wyznaczyć charakterystyki procesu $X(t)$ (wszystkie wartości wyznaczyć Excelu)

Skoro jest to jednorodny proces Markowa (łańcuch Markowa) to wystarczy, że wyznaczymy:

Rozkład początkowy:

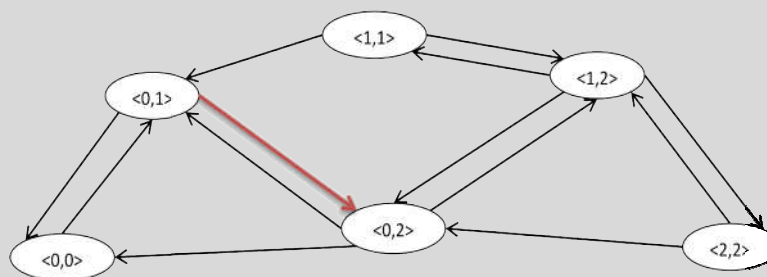
Przyjmijmy, że przy określaniu rozkładów chwilowych w postaci wektorów, zachowamy kolejność współrzędnych odnosząc się do kolejności wypisania stanów $\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle$

Na podstawie opisu zadania: "na początku w systemie jest jedno zadanie", czyli:

$$P_{\langle 0,1 \rangle}(0) = P\{X(0) = \langle 0,1 \rangle\} = 1$$

$$P(0) = \langle 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

Macierz Π :



(rysunek przedstawia tylko fragment grafu przejść między stanami w systemie)

Wyznamy pierwszy element macierzy Π odpowiadający przejściu oznaczonemu na grafie na czerwono, czyli:

$$p_{\langle 0,1 \rangle \langle 0,2 \rangle}(1) = P\{X(t + 1) = \langle 0,2 \rangle | X(t) = \langle 0,1 \rangle\}$$

Aby system zmienił swój stan z $\langle 0,1 \rangle$ (czyli, że jest jedno zadanie w systemie, obsługiwane przez jeden procesor) na stan $\langle 0,2 \rangle$ (czyli oba procesory realizują zadania) to muszą jednocześnie zajść 2 zdarzenia:

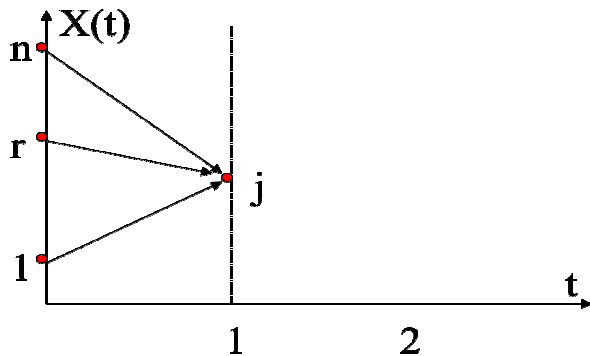
1 – do systemu musi nadejść kolejne zadanie (prawdopodobieństwo p :)

2- procesor obsługujący zadanie nie może go jeszcze zrealizować (prawdopodobieństwo: $1 - q$)

$$p_{\langle 0,1 \rangle \langle 0,2 \rangle}(1) = p * (1 - q)$$

Pozostałe wartości macierzy wyznaczamy postępując analogicznie.

Jak wyznaczyć rozkład $P(1)$ na podstawie $P(0)$ i $\Pi(1)$?



$$P\{X(1) = j\} = P\{X(0) = x_1\} * P\{X(1) = j|X(0) = x_1\} \\ + \dots + P\{X(0) = x_n\} \\ * P\{X(1) = j|X(0) = x_n\}$$

$$P\{X(1) = j\} = P_{x_1}(0)p_{x_1j}(1) + P_{x_2}(0)p_{x_2j}(1) + \dots \\ + P_{x_n}(0)p_{x_nj}(1)$$

$$P(1) = P(0) \cdot \Pi(1)$$

Ogólnie:

$$P(t + k) = P(t) \cdot \Pi(k) = P(t) \cdot \Pi^k$$

Gdzie: $\Pi(k) = \Pi^k(1)$

Zadanie 3: Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w kroku 3 w systemie nie będzie zadań (*pełne rozwiązanie w Excelu*)

$$P_{\langle 0,0 \rangle}(3) = ?$$

Musimy wyznaczyć wektor $P(3)$ z rozkładem chwilowym a z niego wartość $P_{\langle 0,0 \rangle}(3)$

$$P(3) = P(0) \cdot \Pi(3) = P(0) \cdot \Pi^3$$

Zadanie 4: Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w kroku 6 w systemie będą 3 zadania (*pełne rozwiązanie w Excelu*)

$$P_{\langle 0,3 \rangle}(6) + P_{\langle 1,2 \rangle}(6) = ?$$

Tu można uzyskać wartość $P(6)$ na różne sposoby:

$$P(6) = P(3) \cdot \Pi^3$$

$$P(6) = P(0) \cdot \Pi^6$$

Zadanie 5: Wyznaczyć oczekiwaną liczbę zadań w systemie w 10 kroku (*pełne rozwiązanie w Excelu*)

$$P_{\langle 0,1 \rangle}(10) * 1 + P_{\langle 0,2 \rangle}(10) * 2 + P_{\langle 0,3 \rangle}(10) * 3 + P_{\langle 1,1 \rangle}(10) * 2 + P_{\langle 1,2 \rangle}(10) * 3 + P_{\langle 1,3 \rangle}(10) * 4 + P_{\langle 2,2 \rangle}(10) * 4 \\ + P_{\langle 2,3 \rangle}(10) * 5 + P_{\langle 3,3 \rangle}(10) * 6$$

Rozkład graniczny Π^∞

Twierdzenie (ergodyczne)

Jeśli istnieje takie $k > 0$, że wszystkie elementy macierzy są nieujemne $\Pi(k)$ to łańcuch Markowa jest ergodyczny i istnieją granice $\lim_{z \rightarrow \infty} p_{ij}(z) = P_j$

Każdy wiersz macierzy Π^∞ zawiera takie same wartości, dalej oznaczmy taki wiersz $P = \langle P_{x_1}, \dots, P_{x_n} \rangle$,

Na podstawie wyprowadzeń z wykładu, aby wyznaczyć rozkład graniczny P musimy znaleźć niezerowe rozwiązanie równania:

$$(\Pi^T - I)P^T = 0$$

W tym celu po sprowadzeniu do układu równań, zamieniamy jedno równanie równaniem:

$$P_{x_1} + \dots + P_{x_n} = 1$$

Po zamianie nową macierz powstałą z macierzy $(\Pi^T - I)$ oznaczmy B , a macierz powstałą z macierzy 0 oznaczmy b :

Wtedy:

$$P = B^{-1}b$$

Zadanie 6: Wyznaczyć graniczne prawdopodobieństwo, że w systemie jest jedno zadanie (*pełne rozwiązanie w Excelu*)

$$P_{\langle 0,1 \rangle} = ?$$

Zadanie 7: Wyznaczyć oczekiwaną graniczną liczbę zadań w systemie (*pełne rozwiązanie w Excelu*)

$$P_{\langle 0,1 \rangle} * 1 + P_{\langle 0,2 \rangle} * 2 + P_{\langle 0,3 \rangle} * 3 + P_{\langle 1,1 \rangle} * 2 + P_{\langle 1,2 \rangle} * 3 + P_{\langle 1,3 \rangle} * 4 + P_{\langle 2,2 \rangle} * 4 + P_{\langle 2,3 \rangle} * 5 + P_{\langle 3,3 \rangle} * 6$$

Przy okazji charakterystyk granicznych można pokazać zbieżność wartości macierzy przejść $\Pi^k = \Pi(k)$ do wartości granicznych Π^∞ (w Excelu wyznaczone są macierze dla kroków: 3,4,8,16,32,64, przy 64 wartości już pokrywają się z wartościami granicznymi)