

Kolorowanie wierzchołków - optymalne

Pojęcia:

- **Graf** : $G = \langle W, U, P \rangle$
 - **Graf pusty**: $G = \langle W, U, P \rangle$, graf w klasie $\langle 0,0,0 \rangle$ $U = \emptyset, K(G) = 0$
 - **Podgraf** grafu G : (jednoznacznie definiowany przez zbiór wierzchołków)
 $G' = \langle W', U', P' \rangle$ w którym: $W' \subset W, U' \subset U$ oraz $\forall x, y \in W', \forall u \in U [\langle x, u, y \rangle \in P \Rightarrow u \in U']$
 - **Zbiór wewnętrznie stabilny** $W' \subset W$, taki, że $G' = \langle W', U', P' \rangle$ tworzy podgraf pusty
 - **Maksymalny zbiór wewnętrznie stabilny**: zbiór wewnętrznie stabilny, który nie jest podzbiorem właściwym żadnego innego zbioru wewnętrznie stabilnego
 - **Baza grafu G** : każdy podgraf $G' = \langle W', U', P' \rangle$ taki, że każda gałąź grafu G jest incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem z G'
 - **Baza minimalna grafu G** : podgraf $G' = \langle W', U', P' \rangle$ w którym usunięcie jakiegokolwiek wierzchołka spowoduje, że podgraf przestanie być bazą
- $G' = \langle W', U', P' \rangle$ jest bazą grafu $\Leftrightarrow$ gdy $W \setminus W'$ tworzy podgraf pusty (zbiór wewnętrznie stabilny)
- Bazie grafu odpowiada zbiór wewnętrznie stabilny
- Bazie minimalnej odpowiada maksymalny zbiór wewnętrznie stabilny

Pokolorowanie: Funkcja $f: W \rightarrow N$ taka, że $f(x) = f(y) \wedge x \neq y \Rightarrow$ wierzchołki x, y nie są przyległe

Zadanie kolorowania: dla danego grafu $G = \langle W, U \rangle$ wyznaczyć $f^*: W \rightarrow N$ tak, aby

$$\max_{f \in F} f^*(x) = \min_{x \in W} \max_{f \in F} f(x)$$

Gdzie: F – zbiór wszystkich funkcji będących pokolorowaniem

Procedura pokolorowania wierzchołków grafu

1. Wyznaczenie wszystkich maksymalnych zbiorów wewnętrznie stabilnych (baz minimalnych)

$x^{(n)}$ - wektor określający jednoznacznie zbiór wierzchołków, $a_B(G) = [a_{ij}]_{\bar{W} \times \bar{U}}$ - binarna macierz incydencji

$$f_G(x^{(n)}) = \prod_{j=1}^{\bar{U}} \underbrace{\sum_{i=1}^{\bar{W}=n} a_{ij} x_i}_{=1 \rightarrow \text{incydencja gałęzi } j}$$

$=1 \rightarrow \text{incydencja wszystkich gałęzi} \rightarrow \text{wektor } x^{(n)} \text{ określa bazę}$

- Określenie funkcji $f(x^{(n)})$ (WAK)
- Przekształcenie do mfa (algebra Boola)
- Określenie baz i zbiorów wewnętrznie stabilnych

2. Wyznaczenie najmniej licznego pokrycia

$v^{(K)}$ - wektor określający jednoznacznie zbiór wierzchołków, $[b_{ij}]_{\bar{W} \times K}$ - macierz „pokrycia” wierzchołków

$$f_G(v^{(K)}) = \prod_{i=1}^{\bar{W}=n} \underbrace{\sum_{j=1}^K b_{ij} v_j}_{=1 \rightarrow \text{pokrycie wierzchołka } i}$$

$=1 \rightarrow \text{pokrycie wszystkich wierzchołków} \rightarrow \text{wektor } v^{(K)} \text{ określa pokrycie}$

- Określenie funkcji $f(v^{(K)})$ (WAK)
- Przekształcenie do mfa (algebra Boola)
- Określenie pokrycia (najkrótszy iloczyn z mfa)

$$A_1 = W_{i1}, A_p = W_{ip} \setminus \bigcup_{j=1}^{p-1} A_j$$