

Modelowanie matematyczne - PROBLEM 1

Verbalny opis problemu

Pewien zakład produkuje dwa typy wyrobów: typ A i typ B. Na wyprodukowanie wyrobu typu A potrzeba m_A jednostek materiału a na wyprodukowanie wyrobu typu B potrzeba m_B jednostek materiału. Zakład ma w magazynie M jednostek materiału. Czas potrzebny na wyprodukowanie wyrobu typu A oszacowano na t_A jednostek czasu a wyrobu typu B – na t_B jednostek czasu. Łączny czas jaki zakład może przeznaczyć na produkcję wynosi T jednostek czasu. Dział marketingu oszacował również, że popyt na wyrób typu A wyniesie nie więcej niż p_A jednostek natomiast na wyrób typu B - nie mniej niż p_B jednostek. Cenę jednostkową sprzedaży dla wyrobu A oszacowano na c_A natomiast jednostki wyrobu B – na c_B . Ponadto koszty produkcji jednostki wyrobu typu A wynoszą k_A natomiast jednostki wyrobu typu B – k_B . Zakład produkując wyroby chce zmaksymalizować zysk.

Rozwiązanie:

Cechy:

m_A, m_B – liczba jednostek materiału potrzebnych do wyprodukowania wyrobów A i B

M – liczba jednostek materiału w magazynie

t_A, t_B – liczba jednostek czasu potrzebna na wyprodukowanie wyrobów A i B

T – liczba jednostek czasu które zakład może poświęcić na produkcję

p_A – maksymalny popyt na wyrób A

p_B – minimalny popyt na wyrób B

c_A, c_B – jednostkowe ceny sprzedaży dla wyrobów A i B

k_A, k_B - jednostkowe koszty produkcji wyrobów A i B

x_A, x_B - liczba produkowanych jednostek wyrobów A i B

z – zysk zakładu

Model optymalizacyjny: $\langle a, x, w, A, \Omega(a), W(a, x), E_a \rangle$

$a = \langle m_A, m_B, M, t_A, t_B, T, p_A, p_B, c_A, c_B, k_A, k_B \rangle$,

$A = \{ \langle m_A, m_B, M, t_A, t_B, T, p_A, p_B, c_A, c_B, k_A, k_B \rangle \in N^8 \times R^4 \}$

$x = \langle x_A, x_B \rangle$

$\Omega(a) = \{ \langle x_A, x_B \rangle \in N^2 : m_A x_A + m_B x_B \leq M, t_A x_A + t_B x_B \leq T, x_A \leq p_A, x_B \geq p_B \}$

$w = z$

$W(a, x) = \{ z \in R : z = x_A(c_A - k_A) + x_B(c_B - k_B) \}$, $W(a) = \{ z \in W(a, x) : x \in \Omega(a) \}$

$E_a(Z(x^*)) = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \quad Z(x^*) = \max W(a) = \max_{x \in \Omega(a)} Z(x) \\ 0 & \text{w p.p} \end{cases}$

$Z(x) = f(a, x) = x_A(c_A - k_A) + x_B(c_B - k_B)$

Zadanie optymalizacyjne (dwie wersje):

Dla danych

$$a \in A$$

wyznaczyć takie

$$x^* \in \Omega(a)$$

aby

$$E_a(Z(x^*)) = 1$$

Dla danych

$$a \in A$$

wyznaczyć takie

$$x^* \in \Omega(a)$$

aby

$$Z(x^*) = \max_{x \in \Omega(a)} Z(x)$$

Przykład:

$$a = \langle m_A, m_B, M, t_A, t_B, T, p_A, p_B, c_A, c_B, k_A, k_B \rangle$$

Rzeczywiste dane:

$$a = \langle 4, 5, 1300, 7, 11, 2300, 120, 80, 120, 150, 70, 40 \rangle$$

Rzeczywiste ograniczenia dla wybranych danych:

$$\Omega(a) = \{ \langle x_A, x_B \rangle \in N^2 : m_A x_A + m_B x_B \leq M, t_A x_A + t_B x_B \leq T, x_A \leq p_A, x_B \geq p_B \}$$

$$4x_A + 5x_B \leq 1300$$

$$7x_A + 11x_B \leq 2300$$

$$x_A \leq 120$$

$$x_B \geq 80$$

Funkcja celu:

$$W(a, x) = \{ z \in R : z = x_A(c_A - k_A) + x_B(c_B - k_B) \}$$

$$Z(x) = 50x_A + 110x_B$$